



XXIII CONCURSO DE PRIMAVERA DE MATEMÁTICAS

2ª FASE: 27 de abril de 2019

NIVEL IV (Bachillerato)

iii Lee detenidamente estas instrucciones !!!

Escribe tu número de identificación, tu nombre y los datos que se te piden en la hoja de respuestas. **Presta mucha atención al formato de los números.**

IMPORTANTE: Comprueba que el número Mod. en tu hoja de respuestas es 4.

No pases la página hasta que se te indique.

La prueba tiene una duración de **1 HORA 30 MINUTOS.**

No está permitido el uso de calculadoras, reglas graduadas, ni ningún otro instrumento de medida.

Es difícil contestar bien a todas las preguntas en el tiempo indicado. Concéntrate en las que veas más asequibles. Cuando hayas contestado a esas, inténtalo con las restantes.

Cada respuesta correcta te aportará	5 puntos
Cada pregunta que dejes en blanco	1 punto
Cada respuesta errónea	0 puntos

LEE ATENTAMENTE CÓMO DEBES MARCAR LAS OPCIONES EN LA HOJA DE RESPUESTAS Y QUÉ HACER SI TE EQUICOVAS.

Te sugerimos que vayas marcando tus soluciones en la hoja de la prueba y cuando tengas cuatro o cinco las pases todas juntas a la hoja de respuestas.

CONVOCA

Facultad de Matemáticas de la UCM

ORGANIZA

Asociación Matemática
Concurso de Primavera

COLABORAN

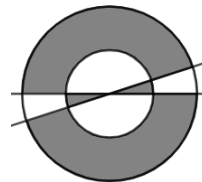
Universidad Complutense de Madrid
Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Grupo ANAYA
Grupo SM
McGraw-Hill Education
Smartick

- 1** Si $3^a = 81^{b+2}$ y $125^b = 5^{a-3}$, ¿cuánto vale $a \cdot b$?
- A) 60 B) 15 C) -30 D) 24 E) 48
- 2** El área que encierra la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 1)$, $B(1, 7)$ y $C(9, 1)$ mide:
- A) 10π B) 25π C) 16π D) 27π E) 9π
- 3** En una circunferencia repartimos n puntos de forma que siempre haya la misma distancia entre dos consecutivos. Dibujamos un polígono regular con vértices en algunos de estos puntos y comprobamos que tenemos tres vértices consecutivos en las posiciones 26, 2 y 8. La suma de n y el número de lados de nuestro polígono dibujado es:
- A) 32 B) 34 C) 35 D) 36 E) 38
- 4** Agustina, Bea y César eligen cada uno un número entero, a , b y c . Agustina calcula $a + \frac{b}{c}$ y obtiene 197. Bea calcula $\frac{a}{c} + b$ y obtiene 92. César calcula $\frac{a+b}{c}$ y obtiene x .
¿Cuánto vale x ?
- A) 16 B) 17 C) 256 D) 270 E) 289
- 5** Si $f(x)$ es una función polinómica que cumple que $f(x^2 + 1) = x^4 + 5x^2 + 3$ para todo número real x , entonces, para todo número real x , se cumple que $f(x^2 - 1)$ es igual a:
- A) $x^4 + 5x^2 + 1$ B) $x^4 + x^2 - 3$ C) $x^4 - 5x^2 + 1$ D) $x^4 + x^2 + 3$ E) $x^4 + 3x^2$
- 6** ¿Cuál es el valor más pequeño de x ($x > 1$) si tiene que cumplir que $\frac{1}{(\ln x)^{\ln x}} \leq \frac{1}{x^2}$?
- A) $e^{\sqrt{e}}$ B) $e^{(e^2)}$ C) e^{2e} D) $(1+e)^e$ E) e^{-2e}
- 7** Sean a y b dos números enteros que cumplen $a + \sqrt{b} = \sqrt{14 + \sqrt{180}}$. Calcula $a^2 + b^2$.
- A) 40 B) 17 C) 29 D) 37 E) 34
- 8** En la sucesión $a_1, a_2, a_3 \dots$ se cumple que $a_1 = a$, $a_3 = b$ y que cada término después del primero es la suma del anterior y del posterior menos uno, es decir, $a_{n+1} = a_n + a_{n+2} - 1$ si $n > 1$. Calcula la suma de los 2019 primeros términos.
- A) $2a + 2b + 2015$ B) $2a + 2b + 2016$ C) $2a + b + 2015$
D) $a + 2b + 2016$ E) $2a + b + 2016$
- 9** Con 300 cubos de 1 centímetro de lado construimos un prisma rectangular sólido y lo apoyamos sobre una mesa. Si sabemos que el perímetro de la base es de 14 centímetros, ¿cuál es la suma de todas las diferentes alturas posibles del prisma?
- A) 80 B) 55 C) 210 D) 105 E) 75
- 10** ¿Cuál es el resto de dividir la suma $3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{2019}$ entre 8?
- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

- 11** Tres amigos juegan con sus piedras. Jorge empieza con 15, Miguel con 14 y Santiago con 13. El juego consiste en que el que tiene más piedras da una piedra a cada uno de los otros amigos y deja otra piedra en un bote. El juego termina cuando uno de los tres se queda sin piedras. En ese momento, ¿cuántas piedras hay en el bote?

A) 36 B) 37 C) 38 D) 39 E) 40

- 12** Dos rectas pasan por el centro de dos círculos concéntricos de radios 1 y 2. Si el cociente entre el área sombreada y el área no sombreada es $7/3$, ¿cuánto mide el ángulo agudo que forman las rectas?



A) 7° B) 14° C) 15° D) 18° E) 21°

- 13** ¿Cuántos números naturales n menores que 100 hacen que $\sqrt{1+2+3+\dots+n}$ sea un número natural?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

- 14** Los cuatro vértices de un cuadrado son los puntos $A(p, q)$, $B(r, s)$, $C(t, 0)$, $D(0, u)$, siendo p, q, r, s, t, u todos positivos. Sabiendo que $p + q + r + s = 36$, ¿cuál es el valor de la suma $t + u$?

A) 9 B) 12 C) 18 D) 6 E) 24

- 15** ¿Cuál es el menor número factorial que es divisible por 2^{1000} ? [$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$]

A) 1000! B) 1001! C) 1004! D) 1008! E) 1010!

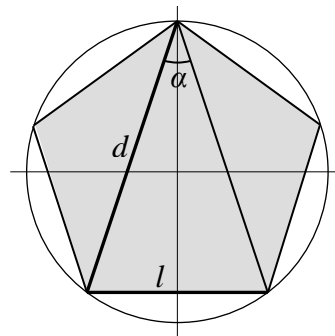
- 16** Si a y b son números positivos distintos de 1, ¿cuánto es $\frac{\log_a(\sqrt[3]{b^5})^2 - 4\log_a\left(\frac{1}{b}\right)}{\log_a\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt{b}}}\right)}$?

A) 173 B) 174 C) 175 D) 176 E) 177

- 17** La relación entre la diagonal del pentágono regular de la figura y su lado es $\frac{d}{l} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Por eso sabemos que el $\cos \alpha$ es igual a:

A) $\phi - 1$ B) $\frac{1}{\phi}$ C) $\frac{\phi}{2}$ D) $\frac{\phi}{4}$

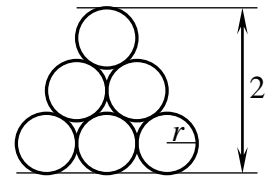
E) $\frac{\sqrt{5}}{4}$



- 18** Tres rectas paralelas cortan al eje de ordenadas en los puntos $A(0, -1)$, $B(0, 2)$, $C(0, 4)$ y al eje de abscisas en los puntos $D(d, 0)$, $E(e, 0)$, $F(f, 0)$. Si sabemos que $d + e + f = 40$, ¿cuál es la pendiente de las rectas?

A) -8 B) $-\frac{1}{8}$ C) -4 D) $-\frac{1}{4}$ E) -1

- 19** Don Retorcido ha situado seis circunferencias iguales tangentes de manera triangular, tal y como se indica en la figura. Una vez hecho esto, la altura de la figura resultante mide 2. ¿Cuánto mide el radio de las circunferencias?

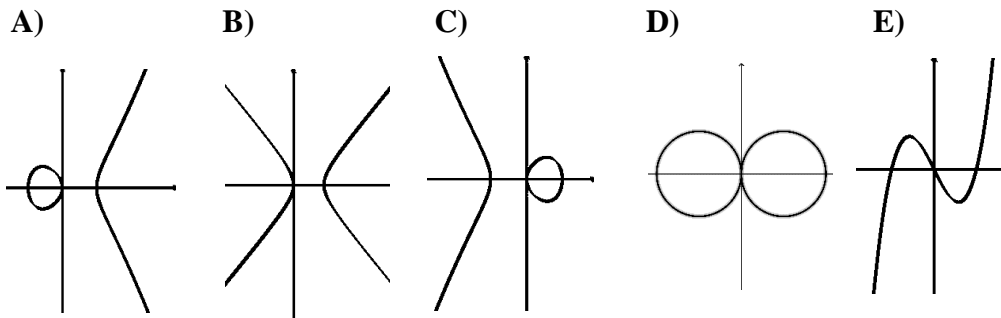


- A) $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

- 20** Marta está en un punto intermedio entre su casa y el gimnasio. Puede ir andando al gimnasio o volver a casa y coger su bici para ir al gimnasio. Sabiendo que en bici va 7 veces más rápido que andando y que haga lo que haga tardará lo mismo, ¿cuál es el cociente entre la distancia a la que está de casa y la distancia a la que está del gimnasio?

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{6}$

- 21** ¿Qué dibujo representa mejor la gráfica de la ecuación $y^2 = x(x^2 - 1)$?



- 22** ¿Cuántos números de cuatro cifras tienen exactamente tres cifras iguales?

- A) 400 B) 360 C) 351 D) 324 E) 320

- 23** Si z es un número complejo y $z^2 = 2z - 2$, entonces z^4 es...

- A) -4 B) 4 C) 8 D) -8 E) 16

- 24** En la urna A tenemos una bola blanca y otra negra, en la urna B tenemos una bola blanca y dos negras y en la urna C tenemos una bola blanca y tres negras. Extraemos al azar una bola de la urna A y la introducimos en la B; a continuación, extraemos al azar una bola de la urna B y la introducimos en la urna C. Y por último, extraemos al azar una bola de la urna C. ¿Qué probabilidad hay de que esta última bola sea negra?

- A) $\frac{13}{20}$ B) $\frac{27}{40}$ C) $\frac{7}{10}$ D) $\frac{29}{40}$ E) $\frac{3}{4}$

- 25** Sean a, b, c, f, g y h los números complejos cuyos afijos son los vértices de un triángulo ABC , su circuncentro F , su baricentro G y su ortocentro H , respectivamente. Entonces:

- A) $a + b + c = 3h$ B) $2(a + b + c) = 3(f + h)$ C) $a + b + c = 2f + h$
D) $2(a + b + c) = 3$ E) $f + h = 2g$